Jochen Weber

Stochastische Unabhängigkeit

Definition:

Zwei Ereignisse A und B heißen stochastisch unabhängig, wenn gilt:
$P_A(B) = P(B)$ bzw. $P_B(A) = P(A)$.

Zwei Ereignisse A und B heißen stochastisch unabhängig, wenn gilt: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Beispiele:

1 Es soll die Auswirkung des Rauchens auf das Bestehen einer Prüfung untersucht werden.
An einer Prüfung nehmen 100 Schüler teil, von denen 40 als Raucher bekannt sind.
Es ergibt sich folgendes Ergebnis:

	P	$\overline{P}$	
R	10	30	40
$\overline{R}$	55	5	60
	65	35	100

Bestimmen Sie, ob die Ereignisse R: „Schüler raucht“ und P: „Schüler besteht die Prüfung“ stochastisch unabhängig sind.

2 Ein Würfel wird zweimal hintereinander geworfen.
Bestimmen Sie, ob die beiden Ereignisse A: „Augensumme 10“ und B: „gleiche Augenzahl in beiden Würfen“ stochastisch unabhängig sind.

3 Aus einem Skatblatt (32 Karten) wird blind eine Karte gezogen.
Bestimmen Sie, ob die beiden Ereignisse A: „Herzkarte“ und B: „Dame“ stochastisch unabhängig sind.

4 In einem Vorort ist die Ampel A_1 mit der Wahrscheinlichkeit 0,25 außer Betrieb, die Ampel A_2 mit der Wahrscheinlichkeit 0,4 außer Betrieb. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide in Betrieb sind, beträgt $\frac{9}{16}$.
Bestimmen Sie, ob die Ereignisse A: „Ampel A_1 nicht in Betrieb“ und B: „Ampel A_2 nicht in Betrieb“ stochastisch unabhängig sind.

1.

$$P(P)=\frac{65}{100}=0{,}65 \qquad P(R)=\frac{40}{100}=0{,}4 \qquad P(P\cap R)=\frac{10}{100}=0{,}1$$

$$P(P)\cdot P(R)=0{,}65\cdot 0{,}4=0{,}26\neq P(P\cap R)$$

$\Rightarrow$ die Ereignisse P und R sind stochastisch abhängig

2.

$$A=\left\{46,64,55\right\} \quad \Rightarrow P(A)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{3}{36}$$

$$B=\left\{11,22,33,44,55,66\right\} \quad \Rightarrow P(B)=6\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{6}{36}$$

$$P(A\cap B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

$$P(A)\cdot P(B)=\frac{3}{36}\cdot\frac{6}{36}=\frac{1}{72}\neq P(A\cap B)$$

$\Rightarrow$ die Ereignisse A und B sind stochastisch abhängig

3.

$$A=\left\{H7,H8,H9,H10,HB,HD,HK,HA\right\} \quad \Rightarrow P(A)=\frac{8}{32}$$

$$B=\left\{HD,KD,KaD,PD\right\} \quad \Rightarrow P(B)=\frac{4}{32}$$

$$A\cap B=\left\{HD\right\} \quad \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{32}$$

$$P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{32}=P(A\cap B)$$

$\Rightarrow$ die Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig

4.

	A_1	$\overline{A_1}$	
A_2	$\frac{9}{16}=0{,}5625$	0,0375	0,6
$\overline{A_2}$	0,1875	0,2125	0,4
	0,75	0,25	1

$P(A)=0{,}25 \quad P(B)=0{,}4 \quad P(A\cap B)=0{,}2125$

$P(A)\cdot P(B)=0{,}25\cdot 0{,}4=0{,}1\neq P(A\cap B)$

$\Rightarrow$ die Ereignisse A und B sind stochastisch abhängig